講義ノート

くりこみ理論 II

アルバータ大　高橋　康

§7. High energy behaviour

前節の reperentations を用いて，high energy behaviour をしらべて見よう。先づ representation (6.14) をとる。

$$\Delta'_F(k^2) = -\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \frac{1}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon} \tag{7.1}$$

with

$$\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2) = 1 \tag{7.2}$$

積分 (7.1) は convergeする（ρ の中のくりこみ定数は勿論発散している）から，$|k^2| \to \infty$の limit をとると

$$\lim_{|k^2|\to\infty} \Delta'_F(k^2) \to -\frac{1}{k^2}\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2) = -\frac{1}{k^2} \tag{7.3}$$

即ち，high energy で $\Delta'_C(k^2)$ は $-1/k^2$ の如く振舞う。これを考慮して (6.28) を用いると

$$\lim_{|k^2|\to\infty} 1+\pi_1(k^2) = z_3 \tag{7.4}$$

即ち

$$z_3(-k^2) \equiv 1+\pi_1(k^2) \tag{7.5}$$

とおくと

$$\lim_{|k^2|\to\infty} z_3(-k^2) = z_3 \tag{7.6}$$

$$z_3(-k^2) = \mathrm{Re}\ z_3(-k^2) + i\ \mathrm{Im}\ z_3(-k^2)$$

だから（7.6）は,

$$\lim_{|k^2|\to\infty} \mathrm{Re}\ z_3(-k^2) = z_3 \qquad (7.7)$$

$$\lim_{|k^2|\to\infty} \mathrm{Im}\ z_3(-k^2) = 0 \qquad (7.8)$$

次に，μ^2 に関する information を得るために，§2 の例をとる。

$$<0|[\phi(x), \phi(x')]|0> = i\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2)\Delta(x-x'\,;\kappa^2)$$

$$\therefore\ (\Box-\mu_0^2)<0|[\phi(x), \phi(x')]|0> = <0|[J(x), \phi(x')]|0>$$

$$= i\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2)(\kappa^2-\mu_0^2)\Delta(x-x'\,;\kappa^2)$$

両辺を $\dfrac{\partial}{\partial t'}$ で微分し $t=t'$ とすると

$$\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2)(\kappa^2-\mu_0^2)\delta(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}') = 0$$

従って，（7.2）を用いて

$$\mu_0^2 = \int_0^\infty d\kappa^2\, \kappa^2 \rho(\kappa^2). \quad \text{(mean virtual mass of meson)} \qquad (7.9)$$

更に，（7.21）と（6.19）を用いて

$$\mu_0^2-\mu^2 = \int_0^\infty d\kappa^2(\kappa^2-\mu^2)\rho(\kappa^2)$$

$$= z_3\int_{\kappa_a^2}^\infty d\kappa^2(\kappa^2-\mu^2)\sigma(\kappa^2) \qquad (7.10)$$

（6.20）及び（6.21）の条件を思い出すと，（7.10）の右辺は常に正，従って

$$\mu_0^2 > \mu^2 \qquad (7.11)$$

という事になる。

（7.9）で与えられる積分は converge しない可能性が多いが，converge したとすると，$\Delta_F'(k^2)$ の漸近形は，もう少し詳しく定まる。即ち

$$\Delta_F'(k^2) = -\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2)\frac{1}{k^2+\kappa^2-i\epsilon}$$

$$= -\frac{1}{k^2} + \int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \frac{\kappa^2}{k^2(k^2+\kappa^2-i\varepsilon)}$$

$|k^2| \to \infty$ で

$$\Delta'_F(k^2) \sim -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k^2)^2} \int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2)\kappa^2$$

$$= -\frac{1}{k^2} + \frac{\mu_0^2}{(k^2)^2} = -\frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{\mu_0^2}{k^2}\right)$$

$$\sim -\frac{1}{k^2}\frac{1}{1+\dfrac{\mu_0^2}{k^2}} = -\frac{1}{k^2+\mu_0^2} \qquad (7.12)$$

即ち，$\Delta'_F(k^2)$ は μ_0^2 が finite の時，$|k^2| \to \infty$ で bare mass をもった propagator の如く振舞う。この物理的意味を次の様に考える事が出来るであろう。即ち，μ_0^2 が有限であるという事は，(7.9) により，$\rho(\kappa^2)$ が κ^2 の大きいところで，速かに 0 になるという事である。言いかえると，高エネルギーでは，相互作用の effct が速かに 0 になるので，bare mass が出て来るのである。

こゝで，いろいろな representation とくりこみの条件，及び high energy behaviovr をまとめておく。

$\Delta'_F(k^2)$ の representations

Dyson representation

$$\Delta'_F(k^2) = -\frac{1}{k^2+\mu^2+\pi^*(k^2)}$$

$$\Delta'_F(k^2) = -\frac{1}{k^2+\mu^2}\left[1 - \frac{1}{k^2+\mu^2}\pi(k^2)\right]$$

Spectral representation

$$\Delta'_F(k^2) = -\int_0^\infty d\kappa^2 \frac{\rho(\kappa^2)}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon}$$

$$\rho(\kappa^2) \geqq 1$$

$$\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2) = 1$$

Renormalization

$$\Delta'_F(k^2) = z_3 \Delta_{FC}(k^2)$$

$$\Delta_{FC}(k^2) \sim -\frac{1}{k^2+\mu^2} \quad \text{at } k^2+\mu^2 \sim 0$$

μ^2 is determined by

$$\pi^*(-\mu^2) = 0$$

z_3 is determined by

$$z_3^{-1} = 1 + \left.\frac{\partial \pi^*(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2+\mu^2=0}$$

すると

$$\Delta'_F(k^2) = -z_3 \frac{1}{k^2+\mu^2-i\varepsilon} \frac{1}{1+\pi_1(k^2)}$$

と書く事が出来る。但し

$$\pi_1(-\mu^2) = 0$$

$$\lim_{|k^2|\to\infty} 1 + \pi_1(k^2) = z_3$$

Spectral representation では

$$\rho(\kappa^2) = z_3\,\delta(\kappa^2-\mu^2) + z_3\,\sigma(k^2)$$

と書くと

$$z_3^{-1} = 1 + \int_{\kappa_a^2}^\infty d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2) \geq 0$$

又, mass は

$$\mu^2 = z_3^{-1}\,\mu_0^2 - \int_{\kappa_a^2}^{\infty} d\kappa^2\,\kappa^2\,\sigma(\kappa^2)$$

となる。

High energy behaviour は,

$$\int_0^{\infty} d\kappa^2\,\rho(\kappa^2) = 1 \quad \text{より}$$

$$\lim_{|k^2|\to\infty} \Delta_F'(k^2) \to -\frac{1}{k^2}$$

更に

$$\mu_0^2 = \int_0^{\infty} d\kappa^2\,\kappa^2\,\rho(\kappa^2) < \infty \quad \text{なら}$$

$$\lim_{|k^2|\to\infty} \Delta_F'(k^2) \to -\frac{1}{k^2+\mu_0^2}$$

又,

$$\lim_{|k^2|\to\infty} \Delta_F'(k^2) = -\lim_{|k^2|\to\infty} \frac{1}{k^2+\mu^2}\,\frac{z_3}{1+\pi_1(k^2)}$$

従って

$$\lim_{|k^2|\to\infty} 1 + \pi_1(k^2) = z_3$$

ここで, $\pi_1(k^2)$ は f, m, μ の関数として converge している。前の $\sigma(\kappa^2)$ と $\pi_1(k^2)$ とは,

$$\sigma(\kappa^2) = \frac{z^{-2}}{\pi}(\kappa^2-\mu^2)\,|\,\Delta_F'(-\kappa^2)|^2\ \mathrm{Im}\,\pi_1(-\kappa^2)$$

と関係している。これを用いると, vertex の high energy limit がわかる。

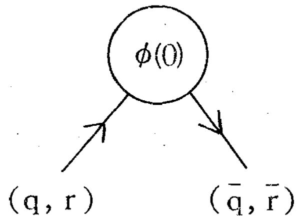
(復習おわり)

vertexの high energy limitを求めるには, 次の様な idea を用いる。定義により

$$\rho(-p^2) = (2\pi)^3 \sum_{\alpha} |\langle 0|\phi(0)|p,\alpha\rangle|^2$$

$$\geq (2\pi)^3 |\langle 0|\phi(0)|p,\alpha\rangle|^2$$

だから，この式の右辺を vertex であらわし，$\rho(-p^2) \to 0$ as $|p^2| \to \infty$ を用いる。そのために $|p,\alpha\rangle$ として，paticle (q, r) (q : momentum, r : spin) と anti-particle $(\bar{q}, \bar{r})$ の状態をとろう。但し，$q, \bar{q}$ は free の momentum である。すると Dirac equation の wave function $u_\alpha(q)$ と $v_\alpha(q)$ を用い，



$$\langle 0|\phi(0)|q, r, \bar{q}, \bar{r}\rangle$$

$$= -z_2 f_0 \frac{1}{(2\pi)^3} \bar{v}^{(\bar{r})}(\bar{q})\, \Gamma(\bar{q}, q)\, u^{(r)}(q)\, \Delta_F'((q-\bar{q})^2)$$

と書ける。そこで

$$z_1 \Gamma(\bar{q}, q) \equiv \Gamma_C(\bar{q}, q) = i\gamma q\, F_1((q-\bar{q})^2) + i\gamma\bar{q}\, F_2((q-\bar{q})^2)$$

$$+ F_3((q-\bar{q})^2)$$

とおくと，

$$\langle 0|\phi(0)|q, r, \bar{q}, \bar{r}\rangle = -z_1^{-1} z_2 \frac{f_0}{(2\pi)^3} \bar{v}^{(\bar{r})}(\bar{q})\, u^{(r)}(q)$$

$$\times F((q-\bar{q})^2)\, \Delta_F'((q-\bar{q})^2)$$

となる。但し

$$(i\gamma q + m) u^{(r)}(q) = 0$$

$$\bar{v}^{(\bar{r})}(\bar{q})\, (i\gamma\bar{q} - m) = 0$$

$$F = -mF_1 + mF_2 + F_3$$

$\therefore$

$$\sum_{r,\bar{r}} |<0|\phi(0)|q,r,\bar{q},\bar{r}>|^2$$

$$= \bar{z}_1^{-2} z_2^2 \frac{f_0^2}{(2\pi)^6} |\Delta_F'((q-\bar{q})^2)|^2 |F((q-\bar{q})^2)|^2$$

$$\times \frac{1}{4\omega(q)\omega(\bar{q})} T_r[(i\gamma\bar{q}+m)(i\gamma q-m)]$$

$$= \bar{z}_1^{-2} z_2^2 \frac{f_0^2}{2(2\pi)^6} |\Delta_F'((q-\bar{q})^2)|^2 |F((q-\bar{q})^2)|^2$$

$$\times \frac{(q-\bar{q})^2}{\omega(q)\omega(\bar{q})}$$

$$\leq \rho(-p^2) = \frac{z_3^{-1}}{\pi}(-p^2-\mu^2)|\Delta_F'(p^2)|^2 \operatorname{Im}\pi_1(p^2)$$

但し，

$$\sum_r u_\alpha^{(r)}(q)\bar{u}_\beta^{(r)}(q) = \frac{1}{2\omega(q)}(i\gamma q-m)_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{\bar{r}} v_\alpha^{(\bar{r})}(\bar{q})\bar{v}_\beta^{(\bar{r})}(\bar{q}) = \frac{1}{2\omega(\bar{q})}(i\gamma\bar{q}+m)_{\alpha\beta}$$

$$\omega(q) = \sqrt{\underset{\sim}{q}^2+m^2}$$

$$p \equiv q+\bar{q}$$

である。$|p^2|\to\infty$ limit は $(q-\bar{q})^2 = -4m^2-p^2$ により，$|(q-\bar{q})^2|\to\infty$ と同じである。従って

$$\operatorname{Im}\pi_1(p^2) \geq \bar{z}_1^{-2} z_2^2 z_3 f_0^2 \frac{\pi}{2(2\pi)^6}|F((q-\bar{q})^2)|^2 \frac{1}{\omega(q)\omega(\bar{q})}$$

で $|p^2|\to\infty$ とすると，右辺は 0 になるから，

$$f^2|F|^2 \to 0 \qquad \text{as } |p^2|\to\infty$$

となる。従って f^2 の normal zone が 0 でなければ，$|F|^2\to\infty$ となり vertex の $|p^2|\to\infty$

limit は0となる。

上の証明では，

$$\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2) = 1$$

即ち， $\rho(\kappa^2) \to 0$ as $\kappa^2 \to \infty$ がきいている。これは，相互作用の effectをあらわす量 $\rho(\kappa^2)$ が high energy で消える即ち vertexが消えるという事を意味するのである。しかしながら， f^2 の normal zone が0であるかもしれないので， $|F|^2 \to 0$ が必ずしも結論出来ない事は頭に入れておかねばならない。

vertex の議論は，前にあげたLehman Symanzik Zimmermanの paper に詳しい。

§8. Renormalization group I

前章迄に考察した，くりこみ可能な理論に於いては，理論に含まれている infinityは，素粒子のmass と coupling constant 及び有限個の renormalization constants の中に吸収される。この事をもう少し一般的な観点からながめると， renormalization group の考え方に到達する。 renormalization groupの考えを用いて， high energyに於ける物理量の behaviour を或程度推測する事が出来る。同様の technique が， statistical mechanics に於ける critical phenomena に apply される時 critical exponentの計算に役立つ様である。

Renormalization gropの議論は，何となく何をやっているかわからない様な式の変形の連続の様な気がするかもしれない。余程，自分の目標を定めておかないと，道に迷う事になる。

話を具体的にするために，§2.の model に戻る。S-matrixのある element は，

vertex 

のつみ重さねから出来ているので

$$\begin{aligned} S &\to \alpha_2 S \\ D &\to \alpha_3 D \\ \Gamma &\to \alpha_1^{-1} \Gamma \end{aligned} \tag{8.1}$$

と， scale 変換すると同時に，

$$f^2 \rightarrow \alpha_1^{\ 2} \alpha_2^{-2} \alpha_3^{-1} f^2 \tag{8.2}$$

と scale を交換してやると， S-matrisc element は不変である。(但し, external line も適当に scale交換しておく。) 従って， Green関数と vertex の normalization を変えた時bare coupling consnt もそれに応じて変えてやると, observable な effct を生じない。

ところで， Field theory に於いては， S′とか D′とかを計算すると発散が出て来るが，その発散は， renormalizable field theory では， mass とか coupling constant とか z の形にまとまる。言いかえると，何かある cut-off procedure を用いて計算すると， cut-off の effect は出たらめでなく，cut-off を∞にした時， mass や coupling constant や， z のみが発散する様にまとまる。すぐあとで見る様に，一定の cut off procedure をとった時，異った二つの cut-off の値に於ける Green 関数は, multiplicative factor で結ばれる。

(8.1)(8.2) の変換を renormalization 変換， 又，この交換は， group をなしているので， renormalization group とよぶ。以下の議論では， group をなしているという事は，あまり気にする必要はない。 group property は，無限小変換を考える事に意味があるという事にのみ用いる。 group property を用いて， abstract 理論を作りあげると何をやっているかわからなくなるので，こゝでは出来るだけ具体的に，今迄勉強して来た representation を用いて話を進めよう。

§2.でとった model に戻ろう。この model は，くりこみ可能だから，

$$\begin{aligned} \Gamma(p,q;\ f_0) &= z_1^{-1}\,\Gamma_C(p,q;\ f) \\ S_F'(p,\ f_0^2) &= z_2 S_{FC}(p;\ f^2) \\ \Delta_F'(k^2,\ f_0^2) &= z_3\,\Delta_{FC}(k^2,\ f^2) \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$f_0^2 = (z_1^{-2} z_2^2 z_3)^{-1}\ f^2 \tag{8.4}$$

と書いた時， C のついた量には，発散は含まれていない。特に，

$$\Delta_{FC}(k^2,\ f^2) = -\frac{1}{k^2+\mu^2}\,\frac{1}{1+\pi_1(k^2,\ f^2)} \tag{8.5}$$

$$\pi_1(-\mu^2,\ f^2) = 0 \tag{8.6}$$

$$\lim_{|k^2|\to\infty} 1+\pi_1(k^2, f^2) = z_3 \tag{8.7}$$

である。以下，数式を簡単にして， idea のみを明らかにするために， Q. E. D. の時の様に $z_1 = z_2$ としよう。

先づ，

$$\Delta_{F\lambda}(k^2, f_\lambda^2) \equiv -\frac{1}{k^2+\mu^2}\,\frac{1+\pi_1(-\lambda^2, f^2)}{1+\pi_1(k^2, f^2)} \tag{8.8}$$

$$f_\lambda^2 \equiv \frac{1}{1+\pi_1(-\lambda^2, f^2)}\, f^2 \tag{8.9}$$

を定義しよう。定義より

$$\lim_{\lambda^2\to\infty} f_\lambda^2 = z_3^{-1} f^2 = f_0^2 \quad (\text{bare coupling const.}) \tag{8.10}$$

$$\lim_{\lambda^2\to\mu^2} f_\lambda^2 = f^2 \quad (\text{renormalized coupling const.}) \tag{8.11}$$

$$\lim_{\lambda^2\to\infty} \Delta_{F\lambda}(k^2, f_\lambda^2) = -\frac{1}{k^2+\mu^2}\,\frac{z_3}{1+\pi_1(k^2, f^2)} = \Delta_F'(k^2, f_0^2) \tag{8.12}$$

$$\lim_{\lambda^2\to\mu^2} \Delta_{F\lambda}(k^2, f_\lambda^2) = -\frac{1}{k^2+\mu^2}\,\frac{1}{1+\pi_1(k^2, f^2)} = \Delta_{FC}(k^2, f^2) \tag{8.13}$$

$\Delta_{F\lambda}$ にあらわれる $(k^2+\mu^2)^{-1}$ の facter は trivial だから

$$-(k^2+\mu^2)\Delta_{F\lambda}(k^2, f_\lambda^2) \equiv \boxed{d(k^2, \lambda^2, f_\lambda^2) = \frac{1+\pi_1(-\lambda^2, f^2)}{1+\pi_1(k^2, f^2)}} \tag{8.14}$$

を定義すると，明らかに

$$\boxed{d(-\lambda^2, \lambda^2, f_\lambda^2) = 1} \tag{8.15}$$

今， cut-off λ_1と λ_2 を考えると，定義(8.14)より

$$d(k^2, \lambda_1^2, f_1^2) = d(k^2, \lambda_2^2, f_2^2)\,\frac{1+\pi_1(-\lambda_1^2, f^2)}{1+\pi_1(-\lambda_2^2, f^2)}$$

$$= d(k^2, \lambda_2^2, f_2^2)\, d(-\lambda_2^2, \lambda_1^2, f_1^2)$$

即ち，

$$\boxed{d(k^2, \lambda_1^2, f_1^2) = d(k^2, \lambda_2^2, f_2^2)/d(-\lambda_1^2, \lambda_2^2, f_2^2)} \tag{8.16}$$

又，

$$f_1^2 = \frac{1 + \pi_1(-\lambda_2^2, f^2)}{1 + \pi_1(-\lambda_1^2, f^2)} \ f_2^2$$

だから，

$$\boxed{f_1^2 = d(-\lambda_1^2, \lambda_2^2, f_2^2)\, f_2^2} \tag{8.17}$$

(8.16)と(8.17)が renormalization group の基本式で，それらを，condition (8.15) をみたす様に解けばよいわけである。こゝでやった様に $z_1 = z_2$ をやり度くなければ，S_F' についても同様の事をやり，全部を連立させればよいわけであるが，$z_1 = z_2$ としても，これ程複雑なので，それ以上の事をやるのは骨がおれる。

(8.16)(8.17)をとり扱う例として，Gell-Mann-Lowの議論を以下紹介しよう。Gell-Mann-Lowは，上の関係をQ.E.Dの high energy 領域に apply して，bare charge の振舞をしらべた。上の式で

$$\lambda_1^2 = \lambda^2 \quad , \quad \mu^2 = 0, \quad \lambda_2^2 = 0$$

とおく。すると，

$$d(k^2, \lambda^2, f_\lambda^2) = d(k^2, 0, f^2)/d(-\lambda^2, 0, f^2)$$

$$f_\lambda^2 = d(-\lambda^2, 0, f^2)\, f^2$$

d は一般に electron mass m^2 に depend するから，available な dimensional quantities は，k^2, m^2, λ^2 である。

$$\frac{k^2}{m^2} \equiv x \quad , \quad -\frac{\lambda^2}{m^2} \equiv y$$

とおき，d を x, y の関数としてあらわす。

$$d(k^2, 0, f^2) \equiv d_C(x, f^2)$$

$$d(-\lambda^2, 0, f^2) \equiv d_C(y, f^2)$$

$|k^2|$, $|\lambda^2| \gg m^2$ なる領域では, $d(k^2, \lambda^2, f_\lambda^2)$ は, $\dfrac{x}{y}$ のみの関数であるから

$$d(k^2, \lambda^2, f_\lambda^2) \equiv d\left(\frac{x}{y}, f_\lambda^2\right)$$

とおくと,

$$d_C(x, f^2) = d_C(y, f^2)\, d\left(\frac{x}{y}, f_\lambda^2\right)$$

$$f_\lambda^2 = d_C(y, f^2)\, f^2$$

$$\therefore\ f^2 d_C(x, f^2) = f^2 d_C(y, f^2)\, d\left(\frac{x}{y}, f^2 d_C(y, f^2)\right)$$

となる。

$$f^2 d_C(x, f^2) \equiv X$$

$$f^2 d_C(y, f^2) \equiv Y$$

とおくと,

$$x = h(X, f^2)$$

$$y = h(Y, f^2)$$

$$\therefore\quad X = Y\ d\left(\frac{h(X, f^2)}{h(Y, f^2)}, Y\right)$$

従って

$$\frac{h(X, f^2)}{h(Y, f^2)}$$

は f^2 に independent である。従って

$$x = h(X, f^2) = \frac{G(X)}{\phi(f^2)}$$

$$\therefore\quad X = G^{-1}[\, x\phi(f^2)\,]$$

$$\therefore\quad f^2 d_C(x, f^2) = G^{-1}[\, x\phi(f^2)\,]$$

$$f^2 d_C(y, f^2) = \bar{G}^{1}[\, y\phi(f^2)\,]$$

もとの notation では

$$f^2 d(-\lambda^2, 0, f^2) = f_\lambda^2 = \bar{G}^{1}[\, -\frac{\lambda^2}{m^2}\phi(f^2)\,]$$

$$f^2 d(k^2, 0, f^2) = f^2[\, -(k^2+\mu^2)\,\varDelta_{FC}(k^2, f^2)\,]$$

$$= f^2\int_{\kappa_\alpha^2}^{\infty} d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2)\frac{k^2+\mu^2}{k^2+\kappa^2} = \bar{G}^{1}[\,\frac{k^2}{m^2}\phi(f^2)\,]$$

しかるに

$$\frac{\partial \bar{G}^{1}[\,\frac{k^2}{m^2}\phi(f^2)\,]}{\partial k^2} = f^2\int_{\kappa_\alpha^2}^{\infty} d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2)\,\frac{k^2+\kappa^2-k^2-\mu^2}{(k^2+\kappa^2)^2}$$

$$= f^2\int_{\kappa_\alpha^2}^{\infty} d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2)\,\frac{\kappa^2-\mu^2}{(k^2+\kappa^2)^2} \geq 0\,.$$

従って　　$\bar{G}^{1}[\,\frac{k^2}{m^2}\phi(f^2)\,]$ は increasing function.

(i)　$\bar{G}^{1}[\,-\frac{\lambda^2}{m^2}\phi(f^2)\,] \to \infty$ なら

$\lim_{\lambda^2\to\infty} f_\lambda^2 \to \infty.$　　perturbation の result.

(ii)　$\bar{G}^{1}[\,-\frac{\lambda^2}{m^2}\phi(f^2)\,] \to$ finite　そしてこの finite valve は $\phi(f^2)$ の値によらない。

$\lim_{\lambda^2\to\infty} f_\lambda^2 =$ finite　(independent of $\phi(f^2)$)

Original form のみ見ていたのでは，$\lim_{\lambda^2\to 0} f_\lambda^2$ が finiteであっても，その値が，f^2 に independent である事が言えない。上の事が関数方程式からわかるのである。上の議論は，複雑に見えるが $z_1 = z_2$ 及び $\mu^2 = \mu_0^2 = 0$ のために，まだまだ簡単な方である。

Gell-Man-Low では，high energy の議論のみがなされて居り，low energy 例えば infra-red の話はなされていない。infra-red は，ロシアの人達によってなされている。これについては，Bogoliubov-Shirkov の教科書をみられたい。

§9. Renormalization group Ⅱ（Di Castro の議論）

以上の考え方を，critical exponent の計算に応用する事が流行しはじめたので，Di Castro の議論を簡単に紹介する。

$$L = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \mu_0^2\phi\phi) + g_0\frac{1}{4!}\phi^4 \tag{9.1}$$

をとる。

一般的な注意。空間，時間の次元を4次元に限ると coupling constant g_0 は dimension less になる。ϕ の Green function (renormalized) を $\varDelta_{FC}(k^2)$ とすると，一般論により

$$\varDelta_{FC}(k^2) = -\frac{1}{(k^2+\mu^2)(1+\pi_1(k^2,\mu^2,g))} \tag{9.2}$$

となる筈である。くりこみの条件は，mass shell $k^2+\mu^2=0$ のあたりで $\varDelta_{FC}(k^2)$ が $-(k^2+\mu^2)^{-1}$ と振舞うというのであるから（そうしないと，$\varDelta_{FC}$ によって propagate する "particle" が変なものになってしまう）$\pi_1(k^2,\mu^2,g)$ は，条件

$$\pi_1(-\mu^2,\mu^2,g) = 0 \tag{9.3}$$

を満足していなければならない。ところで，(9.2) の，$T\sim T_C$ に於ける behaviour を見出すために $\mu^2=0$ とおくと，$\pi_1(k^2,0,g)$ は，次元から，k^2 に depend できない事がすぐわかる。即ち，次元のない π_1 を次元のある k^2 のみから作る事が出来ない。従って

$$\varDelta_{FC} \sim \frac{1}{k^{2-\eta}} \tag{9.4}$$

で critical exponent η を定義するとき，4次元の (9.1) をとる限り

$$\eta = 0$$

となる事がわかる。如何に頑張っても $d=4$ をとる限り $\eta=0$ である。しかし，若し時

間空間の次元を４から下げて $d=4-\varepsilon$ とすると話は変わってくる。この場合, bare coupling const は

$$[g_0]=L^{-\varepsilon}$$

なる次元をもち，くりこみも可能である。(super renormalizable) 今度は，次元のない π_1 at $\mu^2=0$ を作るのに， k^2 と g を使う事が出来る。即ち， $\mu^2=0$ で π_1は $g^2/k^{2\varepsilon}$ から作る事が出来るので， critical exponent η が０でない可能性が生じる。

この事を頭においてmodel (9.1)をながめて見る。ϕ のGreen関数は(9.2)の形に書け

$$\lim_{|k^2|\to\infty} 1+\pi_1(k^2, \alpha)=z$$

と書けるから，(ここでDi CasTro にあわせるため， coupling constant をα, mass をMと書きかえた)

$$\Delta_{F\lambda}(k^2,\alpha_\lambda)=\Delta_F(k^2)\frac{1+\pi_1(-\lambda^2,\alpha)}{1+\pi_1(k^2,\alpha)} \tag{9.5}$$

を考える。これは,

$$\lim_{\lambda^2\to\infty}\Delta_{F\lambda}=\Delta_F'$$

$$\lim_{\lambda^2\to M^2}\Delta_{F\lambda}=\Delta_{FC}$$

$$\lim_{k^2\to-\lambda^2}\Delta_F^{-1}\Delta_{F\lambda}=1. \tag{9.6}$$

今，例によって

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\frac{M^2}{\lambda^2},\alpha_\lambda\right)\equiv\Delta_F^{-1}(k^2)\,\Delta_{F\lambda}(k^2;\alpha_\lambda)=\frac{1+\pi_1(-\lambda^2,\alpha)}{1+\pi_1(k^2,\alpha)} \tag{9.7}$$

とおくと,

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda_1^2},\frac{M^2}{\lambda_1^2},\alpha_1\right)d\left(-\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2},\frac{M^2}{\lambda_2^2},\alpha_2\right)=d\left(\frac{k^2}{\lambda_2^2},\frac{M^2}{\lambda_2^2},\alpha_2\right) \tag{9.8}$$

をうる。これがrenormalization変換の基本式である。但し， α_1とα_2 の関係がわからな

いと，手がつかない。α_1とα_2 の関係には，この場合， vertex が入って来て複雑になるが，

$$\alpha_1 = \alpha_R \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \frac{M^2}{\lambda_2^2}, \alpha_2 \right) \tag{9.9}$$

なる形を仮定しておけば，以下の話には充分である。今，（9.8）を（9.9）を使って解く事が出来ればよいわけだが，その場合，条件（9.6）　即ち

$$d \left(-1, \frac{M^2}{\lambda^2}, \alpha_\lambda \right) = 1 \tag{9.10}$$

が満されていなければならない。（9.8）を解くには，その微分形がとければよかろう（これが唯一の group property を使うところ。即ち， infinitesimal transformation がわかると， group property のおかげで finite transformation を build up する事が出来る。）。

（9.8）を微分方程式に直すために，それを λ_1^2 で微分する：

$$\begin{aligned} 0 = &\left[-\frac{k^2}{\lambda_1^4} \frac{\partial d \left(\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{M^2}{\lambda_1^2}, \alpha_1 \right)}{\partial (k^2/\lambda_1^2)} - \frac{M^2}{\lambda_1^4} \frac{\partial d \left(\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{M^2}{\lambda_1^2}, \alpha_1 \right)}{\partial (M^2/\lambda_1^2)} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\lambda_2^2} \frac{\partial \alpha_R}{\partial (\lambda_1^2/\lambda_2^2)} \frac{\partial d \left(\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{M^2}{\lambda_1^2}, \alpha_1 \right)}{\partial \alpha_1} \right] d \left(-\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \frac{M^2}{\lambda_2^2}, \alpha_2 \right) \\ &+ d \left(\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{M^2}{\lambda_1^2}, \alpha_1 \right) \frac{1}{\lambda_2^2} \frac{\partial d \left(-\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \frac{M^2}{\lambda_2^2}, \alpha_2 \right)}{\partial (\lambda_1^2/\lambda_2^2)} \end{aligned} \tag{9.11}$$

次に $\lambda_2 \to \lambda_1 \equiv \lambda$ とすると，

$$\boxed{\begin{aligned} &-\frac{k^2}{\lambda^2} \frac{\partial d \left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{M^2}{\lambda^2}, \alpha_\lambda \right)}{\partial (k^2/\lambda^2)} - \frac{M^2}{\lambda^2} \frac{\partial d \left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{M^2}{\lambda^2}, \alpha_\lambda \right)}{\partial (M^2/\lambda^2)} \\ &\qquad + \sigma \left(\frac{M^2}{\lambda}, \alpha_\lambda \right) d \left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{M^2}{\lambda^2}, \alpha_\lambda \right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{+\psi\left(\frac{M^2}{\lambda^2},\ \alpha_\lambda\right)\frac{\partial d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\ \frac{M^2}{\lambda^2},\ \alpha_\lambda\right)}{\partial \alpha_\lambda}=0} \tag{9.12}$$

但し,

$$\sigma\left(\frac{M^2}{\lambda^2},\ \alpha_\lambda\right)\equiv\left.\frac{\partial d\left(-\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2},\ \frac{M^2}{\lambda_2^2},\ \alpha_2\right)}{\partial\left(\lambda_1^2/\lambda_2^2\right)}\right|_{\lambda_1^2=\lambda_2^2=\lambda^2} \tag{9.13}$$

$$\psi\left(\frac{M^2}{\lambda^2},\ \alpha_\lambda\right)\equiv\left.\frac{\partial \alpha_R}{\partial\left(\lambda_1^2/\lambda_2^2\right)}\right|_{\lambda_1^2=\lambda_2^2=\lambda^2} \quad . \tag{9.14}$$

こゝで, $T\sim T_C$ に於けるゆらぎの相関が, どの様な尾をひいているかをしらべるために,

$$-\frac{k^2}{\lambda^2}\frac{\partial d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\ 0,\ \alpha_\lambda\right)}{\partial\left(k^2/\lambda^2\right)}+\sigma(0,\alpha_\lambda)\,d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\ 0,\ \alpha_\lambda\right)$$

$$+\psi(0,\alpha_\lambda)\frac{\partial d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\ 0,\ \alpha_\lambda\right)}{\partial \alpha_\lambda}=0 \tag{9.15}$$

更に, notation や simplify するために

$$z\equiv\log\left(k^2/\lambda^2\right)$$

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\ 0,\ \alpha_\lambda\right)\equiv g(z,\alpha_\lambda)$$

$$\sigma(0,\alpha_\lambda)\equiv\sigma(\alpha_\lambda)$$

$$\psi(0,\alpha_\lambda)\equiv\psi(\alpha_\lambda)$$

とおくと (9.15)は簡単に

$$-\frac{\partial g(z,\alpha_\lambda)}{\partial z}+\sigma(\alpha_\lambda)\,g(z,\alpha_\lambda)+\psi(\alpha_\lambda)\frac{\partial g(z,\alpha_\lambda)}{\partial \alpha_\lambda}=0 \tag{9.16}$$

となる。あとは，これを boundary condition (9.10) 即ち

$$g(0, \alpha_\lambda) = 1$$

のもとに解けばよいのである。

Di Castro は (9.16) の解を

$$g(z, \alpha_\lambda) = \exp \int_0^z dz' \sigma(\beta(z', \alpha_\lambda)) \tag{9.17}$$

と書いた。但し

$$\beta(z, \alpha_\lambda) = \rho^{-1}[\rho(\alpha_\lambda) + z] \tag{9.18}$$

$$\rho(\alpha_\lambda) = \int^{\alpha_\lambda} d\alpha' \frac{1}{\psi(\alpha')} . \tag{9.19}$$

(9.17) が (9.16) の解である事は，代入してみれば分かるが，それはあとまわしにして，(9.17) から得られる information を先にのべる。

(9.18) より

$$\rho(\beta(z, \alpha_\lambda)) = \rho(\alpha_\lambda) + 2$$

従って

$$\frac{\partial \rho(\beta(z, \alpha_\lambda))}{\partial z} = \frac{d\rho(\beta(z, \alpha_\lambda))}{d\beta} \frac{\partial \beta}{\partial z} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \beta(z, \alpha_\lambda)}{\partial z} = \left[\frac{d\rho(\beta(z, \alpha_\lambda))}{d\beta} \right]^{-1} = \psi(\beta(z, \alpha_\lambda)) \tag{9.20}$$

この式によると，$z \to -\infty$ (即ち $k^2 \to 0$) で

$$\lim_{z \to -\infty} \beta(z, \alpha_\lambda) = \alpha^* \tag{9.21}$$

但し，

$$\psi(\alpha^*) = 0 . \tag{9.22}$$

一方，(9.17) より，

$$\lim_{z\to-\infty} g(z,\alpha_\lambda) \sim \exp z\sigma(\beta(z,\alpha_\lambda))$$

$$= \exp\left\{\left(\log\frac{k^2}{\lambda^2}\right)\sigma(\alpha^*)\right\} = \left(\frac{k^2}{\lambda^2}\right)^{\sigma(\alpha^*)} \tag{9.23}$$

従って，はじめの Green's function が

$$\Delta_{F\lambda}(k^2)_{M^2=0} \sim \frac{1}{(k)^{2-\eta}} \quad \text{at} \quad k^2 \to 0$$

とすると，(9.23)により

$$\eta = 2\sigma(\alpha^*) \tag{9.24}$$

となる。従って critical exponent η を計算するには，先づ

$$\psi(\alpha^*) = 0$$

を解き，その α^* に於ける $\sigma(\alpha^*)$ を計算すればよい。これは，特別の model をとって計算しなければならない事は勿論である。ψ と σ の定義 (9.13) (9.14) から明らかな様に，こゝで α_R の具体的な形が必要になる。詳しくは Di Castro の paper を見られ度い。

最後に，(9.17) が (9.16) の解になっている事は，次の様にしてわかる。

$$\beta(0,\alpha_\lambda) = \rho^{-1}[\rho(\alpha_\lambda)] = \alpha_\lambda\,. \tag{9.25}$$

(9.19) と (9.18) より

$$\frac{\partial\beta(z,\alpha_\lambda)}{\partial\alpha_\lambda} = \frac{\partial\rho^{-1}[\rho(\alpha_\lambda)+z]}{\partial\rho(\alpha_\lambda)}\,\frac{d\rho(\alpha_\lambda)}{d\alpha_\lambda}$$

$$= \frac{\partial\rho^{-1}[\rho(\alpha_\lambda)+z]}{\partial\rho(\alpha_\lambda)}\,\frac{1}{\psi(\alpha_\lambda)}\,. \tag{9.26}$$

従って

$$-\frac{\partial g(z,\alpha_\lambda)}{\partial z} = -\sigma(\beta(z,\alpha_\lambda))\,g(z,\alpha_\lambda) \tag{9.27}$$

又，

$$\psi(\alpha_\lambda)\frac{\partial g(z,\alpha_\lambda)}{\partial\alpha_\lambda}=\psi(\alpha_\lambda)g(z,\alpha_\lambda)\int_0^z dz'\frac{\partial}{\partial\alpha_\lambda}\sigma(\beta(z',\alpha_\lambda))$$

$$=\psi(\alpha_\lambda)g(z,\alpha_\lambda)\int_0^z dz'\frac{d\sigma(\beta(z',\alpha_\lambda))}{d\beta(z',\alpha_\lambda)}\frac{\partial\beta(z',\alpha_\lambda)}{\partial\alpha_\lambda}$$

$$=\psi(\alpha_\lambda)g(z,\alpha_\lambda)\int_0^z dz'\frac{d\sigma(\beta(z',\alpha_\lambda))}{d\beta(z',\alpha_\lambda)}\frac{\partial\rho^{-1}[\rho(\alpha_\lambda)+z']}{\partial z'}\frac{1}{\psi(\alpha_\lambda)}$$

$$=g(z,\alpha_\lambda)\int_0^z dz'\frac{\partial}{\partial z'}\sigma(\beta(z',\alpha_\lambda))$$

$$=g(z,\alpha_\lambda)\{\sigma(\beta(z,\alpha_\lambda))-\sigma(\alpha_\lambda)\}. \tag{9.28}$$

(9.28) と (9.27) を一緒にすると，(9.16) になる。

§10.　Scale transformation and Ward relation

最近 Saclay の人々，Brezin, Le Guillou と Zinn-Justin らによって，Callan-Symanzik equation を応用して critical exponents を計算する方法が提出された。

Brezin, Le Guillou, Zinn-Justin, Wilson's Theory of Crytical Phenomena and Callan-Symanzik equation in $4-\varepsilon$ dimension.
Preprint

Calln, Phys. Rev 2 1541 (1970)

Symanzik, Comm. Math. Phys. 18 227 (1970)

23 49 (1971)

第一の paper は，Callan と Symanzik の paper を $4-\varepsilon$ に straightforwerd に apply したものだが，Callan の paper も Symanzik の paper も難解である。簡単にいうと話はこうである。

先づ scale変換を考え，その変換に伴う scale current を定義する。scale current は，理論が scale 変換で invariant なら conserve し，そうでなければ conserveしない*)。とに角，この scale current についてのWard relation を書き下す事が出来るが，それと次元解析を併用する事により，ある関係が得られる。しかし，場の理論には，さける事の出来ない発散が含まれているので，実際計算では cut-offを用いなければならない。cut-off を用いると，新しい次元を導入する事になるので，次元解析がくずれ，前に得た関係を補正しなければならなくなる。斯くて，新しく得られた補正された関係をCallan-Symanzik equationとよぶ。この補正が $4-\epsilon$ dimension に apply した時，critical exponent と関係してくる。

こゝに述べた様に，Callan-Symanzik equation は，Seale変換と密接に関係しているから，先づそれから説明する。

場の量を $\phi(x)$, mass μ_0，coupling const を g_0 とする（全部 unrenormalized quantities）Lagrangian は

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}(\partial_\mu\phi(x),\ \phi(x),\ \mu_0,\ g_0) \qquad (10.1)$$

とする。こゝで，次元を　（$\hbar = c = 1$）

$$[\,\phi(x)\,]=L^{-\ell_0}$$
$$[\,\mu_0\,]=L^{-1} \qquad (10.2)$$
$$[\,g_0\,]=L^{\eta_0}$$

とおくと，

$$[\mathscr{L}]=L^{-4} \qquad (10.3)$$

だから，Euler の関係

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\,\partial_\mu\phi\,(\ell_0+1)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\,\phi\,\ell_0+\mu_0\,\frac{\partial}{\partial\mu_0}\mathscr{L}-\eta_0\,g_0\,\frac{\partial}{\partial g_0}\,\mathscr{L}=4\mathscr{L} \qquad (10.4)$$

---

*) 世の中の全体が**scale**変換で不変ではありえない。何故なら，scale 変換に対する不変性から，elementary particleの mass spectrumは，continuous でなければならないという事が証明できる。現実には elementary particle の mass spectrumは continuous でなく discrete である。

が成立つ事を注意しよう。

seale変換（dilatation変換ともいう）を次の様に定義する：

$$x_\mu \to x'_\mu = \lambda x_\mu$$
$$\phi(x) \to \phi'(x') = \lambda^{-\ell_0} \phi(x) \tag{10.5}$$

$$\mu_0 \to \mu'_0 = \mu_0$$
$$g_0 \to g'_0 = g_0 \tag{10.6}$$

即ち x-dependent なもののみを変換し， constants μ_0，g_0を変換しない。これが rule of the game である。以下，無限少変換

$$\lambda = 1 + \varepsilon$$

を考える。この変換に伴う current を次の様に定義する：

$$S_\mu(x) = t'_{\mu\nu}(x)\, x_\nu \tag{10.7}$$

但し

$$t'_{\mu\nu}(x) = t_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{3}\ell_0 \delta_{\mu\nu}\partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\lambda \phi}\phi\right) - \frac{1}{3}\ell_0 \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\phi\right. \tag{10.8}$$

$$t_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\nu \phi - \delta_{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{10.9}$$

$t_{\mu\nu}(x)$はいわゆる canonical energy tensor で

$$\begin{aligned}\partial_\mu t_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\right)\partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\nu \phi}\partial_\mu \partial_\nu \phi - \partial_\nu \mathscr{L} \\ &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi}\partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\mu \partial_\nu \phi - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi}\partial_\nu \phi - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\mu \partial_\nu \phi \\ &= 0\end{aligned} \tag{10.10}$$

を満す。従って

$$\partial_\mu t'_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu t_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{3}\ell_0 \partial_\nu \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\lambda \phi} \phi \right) - \frac{1}{3}\ell_0 \partial_\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \phi \right)$$

$$= 0 \tag{10.11}$$

且つ,

$$t'_{\mu\mu}(x) = t_{\mu\mu}(x) + \ell_0 \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\lambda \phi} \phi \right)$$

$$= -4\mathscr{L} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \phi + \ell_0 \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \phi + \ell_0 \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \phi$$

$$= -4\mathscr{L} + (\ell_0 + 1) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \phi + \ell_0 \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} \phi$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mu_0} + \eta_0 g_0 \frac{\partial}{\partial g_0} \mathscr{L} \equiv \Theta(x) \tag{10.12}$$

となる。こゝで(10.4)を用いた。

さて, scale current は,

$$\partial_\mu S_\mu(x) = \partial_\mu t'_{\mu\nu}(x) \cdot x_\nu + t'_{\mu\mu}(x) = t'_{\mu\mu}(x)$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mu_0} + \eta_0 g_0 \frac{\partial}{\partial g_0} \mathscr{L} = \Theta(x) \tag{10.13}$$

を満すから, 若し Lagrangian が μ_0 や, $\eta_0 \neq 0$ なる g_0 を explicit に含んでいると, $S_\mu(x)$ は conserve しない*)。μ_0 や $\eta_0 \neq 0$ なる g_0 を含んでいなければ, conserve する。

Dilatation curreut が定義できたから, dilatation の generator を

$$D(x_0) \equiv -i \int d^3x \, S_4(x) \tag{10.14}$$

---

*) 若し, 運動方程式を使った結果, (10.13)の右辺が何かある local vector $K_\mu(x)$ の divergence 即ち, $\partial_\mu K_\mu(x)$ と書ける時は, $S_\mu(x) - K_\mu(x)$ で scale current を redefine した方が, 便利である。この点については

Aurilia, Takahashi, Umezawa, Phys. Rev. 5 851 (1972)

で定義すると，

$$\phi'(x) = e^{-iD(x_0)\varepsilon}\phi(x)\,e^{iD(x_0)\varepsilon}$$

又は，

$$[\,D(x_0),\ \phi(x)\,] = -i\ (\ell + x_\lambda \partial_\lambda)\,\phi(x) \qquad (10.15)$$

を満す。こゝに ℓ は通常は naive dimension ℓ_0 に等しいが，前に言った様に，発散にもとづく anomaly があらわれる。以下では，一応 ℓ_0に等しいとしておいて，くりこむ時に補正をする事にする。即ち，以下，

$$[\,D(x_0),\ \phi(x)\,] = -i\ (\ell_0 + x_\lambda \partial_\lambda)\,\phi(x) \qquad (10.16)$$

とする。

次にWard relation を導きたいが，まだ材料が足りない。Ward relation を得るには，$S_4(x)$と $\phi(x')$ の同時交換関係が必要になる。これは，一般に model dependent であるが，(10.16)及び(10.14)から， $x_0 = x_0'$ で

$$[\,S_4(x),\ \phi(x')\,] = (\ell_0 + x_\lambda' \partial_\lambda')\,\phi(x')\,\delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}') + \cdots\cdots\cdots \qquad (10.17)$$

と書いておいてよかろう。……の termは，$\underset{\sim}{x}$ で空間積分した時，消えてしまう様なものである。これで，Ward relationを導く材料がそろった。さて

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} T(A(t), B(t')) \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial t}\{\theta(t - t')A(t)B(t') + \theta(t' - t)B(t')A(t)\} \\
&\quad = \delta(t - t')\,[\,A(t), B(t')\,] + T(\dot{A}(t), B(t'))
\end{aligned} \qquad (10.18)$$

を用いると，(10.18)(10.13)から

$$\partial_\mu < T(S_\mu(x),\ \phi(x_1), \cdots, \phi(x_n)) >_0$$

$$= < T(\partial_\mu S_\mu(x),\ \phi(x_1), \cdots, \phi(x_n)) >_0$$

$$-i\sum_{i=1}^{n}\delta^{(4)}(x-x_i)\left(\ell_0+x_{i\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{i\lambda}}\right)<T(\phi(x_1),\cdots,\phi(x_n))>_0$$

$$+\cdots\cdots\cdots \tag{10.19}$$

を得る。こゝで，……は，（10.18）の……から来た termで，　xについて空間積分すれば落ちる様なものである。（10.19）はWard relationだが，このまゝでは，よくわからない term……が入っているので使えない。もっと使える様にするためには，両辺をFourier transform する：

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+\cdots+p_n)G(p_1,\cdots,p_n)$$

$$\equiv\int d^4x_1\cdots d^4x_n\, e^{-i(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)}<T(\phi(x_1),\cdots,\phi(x_n))>_0 \tag{10.20}$$

及び

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(q+p_1+\cdots+p_n)F(q;p_1,\cdots,p_n)$$

$$\equiv\int d^4x\, d^4x_1\cdots d^4x_n\, e^{-i(qx+p_1x_1+\cdots+p_nx_n)}<T(\Theta(x),\phi(x_1),\cdots,\phi(x_n))>_0 \tag{10.21}$$

を（10.19）に入れて $q=0$ とおくと（その時……がおちる）

$$\left[n(\ell_0-4)+4-\sum_{i=1}^{n-1}p_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right]G(p_1,\cdots,p_{n-1},-p_1\cdots-p_{n-1})$$

$$=iF(0;p_1\cdots,p_{n-1},-p_1-\cdots-p_{n-1}) \tag{10.22}$$

を得る。このまゝで使ってもよいが，Callan と Symazik は，これから更に one-particle -irreducible Green's function（以下O－P－I－G－Fと略記）というものを導入している。それは，一本の内線を切る事によって二つの図形にわかる様なものを除外し，それを external leg の数だけの propagator で割ったものをいう。

Gに対応するO-P-I-G-Fを　$\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_{n-1})$

Fに対応する　〃　を　$\Delta\Gamma^{(n)}(p_1\cdots,p_{n-1})$

と書くと，（10.22）より

$$[\,4 - n\ell_0 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial}{\partial p_i}\,]\,\Gamma^{(n)}(p_1, \cdots, p_{n-1}) = i\Delta\Gamma^{(n)}(p_1, \cdots, p_{n-1}) \tag{10.23}$$

を得る。（10.22）と（10.23）で［　］の中の第一項が変ったのは，Gと$\Gamma^{(n)}$の次元の相異による。即ち

$$[\,G\,] = L^{-4-n(\ell_0-4)}$$

$$[\,\Gamma^{(n)}\,] = L^{-4+n\ell_0} \quad . \tag{10.24}$$

$\Gamma^{(n)}$は$p_1, \cdots, p_{n-1}$，μ_0，g_0から出来ているから，Eulerの関係

$$[\,4 - n\ell_0 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial}{\partial p_i}\,]\,\Gamma^{(n)}(p_1, \cdots, p_{n-1})$$

$$= (\,\mu_0 \frac{\partial}{\partial \mu_0} - \eta_0 g_0 \frac{\partial}{\partial g_0})\,\Gamma^{(n)}(p_1, \cdots, p_{n-1}) \tag{10.25}$$

が成立つ。これを（10.23）に入れると，

$$\boxed{\begin{aligned}&[\,\mu_0 \frac{\partial}{\partial \mu_0} - \eta_0 g_0 \frac{\partial}{\partial g_0}\,]\,\Gamma^{(n)}(p_1, \cdots, p_{n-1})\\ &\qquad = i\Delta\Gamma^{(n)}(p_1, \cdots, p_{n-1})\end{aligned}} \tag{10.26}$$

をうる。これが unrenormalized quantity に成り立つ関係であって，Scaling law とよばれる。

前に言った様に，実は，理論には発散がふくまれており，上に用いた次元解析がくずれる事になるが，それを調べる前に，例をあげておく。

以後，話を

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\,\partial_\mu\phi\,\partial_\mu\phi + \mu_0^2\,\phi\phi\,) - \frac{g_0}{24}\phi^4 \tag{10.27}$$

に限ろう。公式により

$$t_{\mu\nu} = -\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \delta_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} \partial_\lambda \phi \partial_\lambda \phi - \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi^2 - \frac{g_0}{24} \phi^4 \right] \qquad (10.28)$$

$$t'_{\mu\nu} \; -\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \left[\partial_\lambda \phi \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \phi \Box \phi - \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi^2 \right]$$

$$-\frac{1}{6} (\Box \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \phi^2 \qquad (10.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \ell_0 &= 1 \\ \eta_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad (10.30)$$

$$G(p, -p) = i \Delta'_F (p^2)$$

$$\Gamma^{(2)}(p) \equiv i \Delta'_F (p^2) \left[\Delta'_F (p^2) \right]^{-2} = i \Delta'^{-1}_F (p^2)$$

$$F(0\,;p, -p) = \int d^4x\, d^4x_1 \; e^{-ipx_1} < T(\Theta(x), \phi(x_1), \phi(0)) >_0$$

$$\Delta\Gamma^{(2)}(p) = F(0\,;p, -p) \left[\Delta'_F (p^2) \right]^2$$

$$G(p_1, p_2, p_3, -p_1 - p_2 - p_3) = \frac{g_0}{(2\pi)^4} \int d^4y_1 \, d^4y_2 \, d^4y_3 \, d^4y_4 \, d^4p_4$$

$$\times e^{-i(p_1 y_1 + \cdots + p_4 y_4)} \Gamma(y_1, y_2, y_3, y_4) \Delta'_F(p_1^2) \cdots \Delta'_F(p_4^2)$$

$$\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3) = g_0 \Gamma(p_1, p_2, p_3, -p_1 - p_2 - p_3)$$

となる。以上は, unrenormalized quantities だが, renormalization をすると scaling law がどうなるかが問題である。以下，それを考えよう。

§ 11. Callan-Symanzik equation

前頁の例からわかる様に, renormalized mass を μ, renormalized coupling constant を gとすると

$$\Gamma^{(n)}(p_i, \mu_0, g_0) = Z_2^{-\frac{n}{2}}(\mu, g)\, \Gamma_C^{(n)}(p_i, \mu, g) \tag{11.1}$$

即ち，

$$\Gamma^{(2)}(p_i, \mu_0, g_0) = i\, \Delta_F^{\prime -1}(p^2, \mu_0, g_0)$$

$$\Gamma_C^{(2)}(p_i, \mu, g_0) = i\, \Delta_{FC}^{\prime -1}(p^2, \mu_0, g)$$

$$\Gamma^{(4)}(p_i, \mu_0, g_0) = g_0\, \Gamma(p_1, p_2, p_3, -p_1-p_2-p_3)$$

$$\Gamma_C^{(4)}(p_i, \mu_0, g_0) = g\;\; \Gamma_C(p_1, p_2, p_3, -p_1-p_2-p_3)$$

$$g_0 = Z_1 Z_2^{-2}\, g\,.$$

今，（11.1）を（10.26）に入れ，μと gとを独立変数とすると，

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial \mu_0} = \mu_0 \frac{\partial \mu}{\partial \mu_0} \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g}{\partial \mu_0} \frac{\partial}{\partial g} \tag{11.2}$$

に注意して，

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[\alpha(g)\, \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{n}{2} \gamma(g)\right] \Gamma_C^{(n)}(p_i, \mu, g) \\ &\quad = i\, Z_2^{\frac{n}{2}}(\mu, g)\, \Delta\Gamma^{(n)}(p_i, \mu_0, g_0) \\ &\quad \equiv i\, \Delta\Gamma_C^{(n)}(p_i, \mu, g) \end{aligned}} \tag{11.3}$$

但し

$$\alpha(g) = \frac{\mu_0}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \mu_0}\Bigg|_{g_0} \tag{11.4}$$

$$\beta(g) = \mu_0 \frac{\partial g}{\partial \mu_0}\Bigg|_{g_0} \tag{11.5}$$

$$\gamma(g) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial \mu_0} \log Z_2(\mu, g)\Bigg|_{g_0} \tag{11.6}$$

である。(11.3)をCallen-Symanzik equationとよぶ。(11.4)〜(11.6)の右辺がcut-offによらない事は，こゝではわからないが，cut-offによらなければ，mass μ にもよらない事は次元からわかる。cut-offによらない事は，次の様にすればよい。それには，$\Gamma^{(n)}$に対するrenormalization conditionを用いて α, β, γ をあらわしてみる。renormlizationは

(i) $\Gamma_C^{(2)}(p^2, \mu, g) \sim -i(p^2+\mu^2)$ at $p^2+\mu^2=0$ (11.7)

(ii) $\dfrac{\partial\Gamma_C^{(2)}(p^2, \mu, g)}{\partial p^2} = -i$ at $p^2+\mu^2=0$ (11.8)

(iii) $\Gamma_C^{(4)}(p_i, \mu, g) = ig$ at $p_i p_j = \dfrac{1}{3}\mu^2(1-4\delta_{ij})$ (11.9)

先づ(11.7)を(11.3)に入れると

$$-2i\mu^2\alpha(g) = i\Delta\Gamma^{(2)}(p, \mu, g) \quad \text{at } p^2+\mu^2=0$$

即ち

$$\alpha(g) = -\frac{1}{2\mu^2}\Delta\Gamma^{(2)}(p, \mu, g)\Big|_{p^2+\mu^2=0} \tag{11.10}$$

これはcut-offによらない。従ってmass μ にもよらない。

次に(11.8)を(11.3)に用いると

$$\gamma(g) = \Big[\frac{\partial}{\partial p^2}\Delta\Gamma_C^{(2)}(p, \mu, g) + 2i\mu^2\Big(\frac{\partial}{\partial p^2}\Big)^2\Gamma_C^{(2)}(p, \mu, g)\Big]_{p^2+\mu^2=0} \tag{11.11}$$

最後の関係(11.9)より

$$\beta(g) = 2g\gamma(g) + \Big[\Delta\Gamma_C^{(2)}(p_i, \mu, g) - i\sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial}{\partial p_i}\Gamma_C^{(4)}(p_i, \mu, g)\Big]_{p_i p_j = \frac{1}{3}\mu^2(1-4\delta_{ij})} \tag{11.12}$$

(11.11)と(11.12)両者とも cut-off をふくまない。

Relativistic frild theory では，速度 v の mass $\mu(v)$ は

$$\mu(v) = \frac{\mu(0)}{\sqrt{1-v^2}}$$

と交換する事から

$$\Delta\Gamma^{(2)}(p, \mu, g) = -2\mu^2 \quad (p^2+\mu^2=0) \tag{11.13}$$

が得られるから(11.10)は簡単に

$$\alpha(g) = 1 \tag{11.14}$$

となる。(11.13)については，Self-stress の議論，例えば

Pais, Epstein. Rev. Mod. Phys. <u>21</u> 445 (1949).

を見よ。

(11. 3)に戻り，これから $\Gamma_C^{(n)}$ の high energy behaviour を評価したいわけだが，このまゝではあまり大した事が言えない。しかし，先づ，右辺が high energy で消えてしまう事に気をつけよう。即ち high energy では $\alpha(g)=1$ として

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} - \frac{n}{2}\gamma(g)\right]\Gamma_{asy.}^{(n)}(p_i, \mu, g) = 0 \tag{11.15}$$

となる。従って

$$\Gamma_{asy.}^{(n)}\left(p_i, \frac{\mu}{\lambda}, g\right) = A_n(g, \lambda)\,\Gamma_{asy.}^{(n)}(p_i, \mu, g(\lambda)) \tag{11.16}$$

と書く事が出来る。但し

$$A_n(g, \lambda) = \exp\left[-\frac{n}{2}\int_g^{g(\lambda)} dg'\,\gamma(g')\beta^{-1}(g')\right] \tag{11.17}$$

であり $g(\lambda)$ は

$$\int_g^{g(\lambda)} dg'\,\beta^{-1}(g') = \log\lambda \tag{11.18}$$

で与えられる。((11.16)を(11.15)に入れてみよ)

さて，若し$\beta(g)$が唯一の zero g_∞をもち，

$$\beta'(g_\infty) < 0$$

とすると，(11.18)より，

$$g(\infty) = g_\infty$$

を得る。この場合には，

$$\Gamma^{(n)}_{\mathrm{asy.}}\left(p_i, \frac{\mu}{\lambda}, g\right) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{n}{2}\gamma(g_\infty)\log\lambda}\,\Gamma^{(n)}(p_i, \mu, g_\infty)$$

$$\propto \lambda^{-\frac{n}{2}\gamma(g_\infty)} \tag{11.19}$$

次元から

$$\Gamma^{(n)}(\lambda p_i, \mu, g) = \lambda^{4-n}\Gamma^{(n)}\left(p_i, \frac{\mu}{\lambda}, g\right)$$

$$\sim \lambda^{4-n-\frac{n}{2}\gamma(g_\infty)} \tag{11.20}$$

となる。

上の議論を critical exponent の計算に応用するとき，$\gamma(g_\infty)$がηとなる。他の critical exponent の計算には，もう少し上の議論を refine しなければならないが，詳しくは§10 にあげたBrezin et al の preprint を参照されたい。

最後に，いろいろ discuss して頂いた物性研の方々及び教育大物理教室の方々に感謝します。